



ce
pre
UNI

Álgebra

TEMA

**SERIES FINITAS Y SERIES DE NUMEROS
REALES (PARTE II)**

**CICLO
PREUNIVERSITARIO**

2024-1



CONTENIDOS

- Condición necesaria de convergencia
- Algunos criterios de convergencia
 - ❖ Criterio de comparación
 - ❖ Criterio de la razón
 - ❖ Criterio de la raíz
 - ❖ Criterio de Leibnitz
- Convergencia absoluta

CONDICIÓN NECESARIA DE CONVERGENCIA

Teorema a

Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

Demostración Supongamos que la serie converge al número real L , esto es, la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge al número real L . Luego:

$$s_n - s_{n-1} = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$L - L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Corolario o

Si no se cumple que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

Ejemplo Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 - 7}{5k^2 + 3k + 1}$$

Resolución

Sea $a_k = \frac{2k^2 - 7}{5k^2 + 3k + 1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k^2 - 7}{5k^2 + 3k + 1} = \frac{2}{5}$

Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$.

Aplicando el **Corolario**, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 - 7}{5k^2 + 3k + 1}$ diverge.

Ejemplo Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1} + k4^k}{k2^k}$$

Resolución

Sea $a_k = \frac{2^{k+1} + k4^k}{k2^k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Tenemos que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{k} + 2^k \right) = \infty$

Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$.

Aplicando el **Corolario**, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1} + k4^k}{k2^k}$ diverge.

Ejemplo Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$$

Resolución

Sea $a_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Tenemos que si observamos los primeros términos de la sucesión

$$a_k = \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1; \dots \dots \dots\right\}$$

Se concluye que esta es oscilante con puntos límite $-\frac{1}{2}$ y 1, luego la sucesión $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ no converge.

Así, aplicando el **Corolario**, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$ diverge.

Ejercicio

272. ¿Cuántas de las siguientes series son divergentes?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^3+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

A) 0
D) 3

B) 1
E) 4

C) 2

CRITERIOS PARA ANALIZAR LA CONVERGENCIA DE UNA SERIE

ce
pre
UNI

Teorema (Criterio de Comparación)

Sean las sucesiones $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, tales que a partir de cierto valor de k natural se cumple que $0 \leq a_k \leq b_k$

- i) Si la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ **converge**, entonces $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ también **converge**.
- ii) Si la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ **diverge a $+\infty$** , entonces $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ también **diverge a $+\infty$** .

Ejemplo Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{\pi k - 2}$$

Resolución
n

$$\forall k \in \mathbb{N}: \frac{1}{k} < b_k = \frac{\pi}{\pi k - 2} = \frac{1}{k - \frac{2}{\pi}}$$

La serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge a $+\infty$,

entonces por el **criterio de comparación** la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{\pi k - 2}$ también diverge a $+\infty$.

Ejemplo

Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen} k^4}{\sqrt{k^4 + 1}}$$

Resolución

$$\forall k \in \mathbb{N}: a_k = \frac{\text{sen} k^4}{\sqrt{k^4 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k^4 + 1}} \leq \frac{1}{k^2}$$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, pues es una serie p, con $p = 2$;

entonces por el **criterio de comparación**, tenemos que la serie

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen} k^4}{\sqrt{k^4 + 1}}$ también converge.

Ejercicio

279. Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n^2}$ es convergente

II. La serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ es convergente

III. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k + \pi}$ es convergente

A) VFV

B) FFV

C) VFF

D) VVF

E) FVF

Teorema (Criterio de la Razón)

Dada la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, donde $a_k \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Supongamos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \mathbf{L}.$$

- i) Si $0 \leq \mathbf{L} < 1$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge.
- ii) Si $\mathbf{L} > 1$ o $\mathbf{L} = +\infty$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge
- iii) El criterio no es concluyente si $\mathbf{L} = 1$ o dicho límite no existe

Ejemplo Investigue la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$$

Resolución

Sea $a_k = k^2 e^{-k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Tenemos que

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^2 e^{-(k+1)}}{k^2 e^{-k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^2}{k^2 e} = \frac{1}{e}$$

Como $L = \frac{1}{e} < 1$, entonces por el **criterio de la razón** la serie converge.

Ejemplo Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{3^k - 1}$$

Resolución

Sea $a_k = \frac{k!}{3^k - 1}, \forall k \in \mathbb{N}$.

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{3^{k+1} - 1} \cdot \frac{3^k - 1}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^k - 1}{3^{k+1} - 1} (k + 1)$$

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{3^k}}{3 - \frac{1}{3^k}} \cdot (k + 1) = \infty$$

Entonces del **criterio de la razón**, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{3^k - 1}$ diverge.

Ejercicio

Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^{k+1} k!}{k^k}$$

Resolución

Teorema (Criterio de la Raíz)

Dada la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Supongamos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L$$

- i) Si $0 \leq L < 1$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge
- ii) Si $L > 1$ o $L = +\infty$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge
- iii) El criterio no es concluyente si $L = 1$ o dicho límite no existe

Ejemplo

Investigue la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}$$

Resolución

$$\text{Sea } a_k = \frac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[k]{(-1)^k + 3}}{2^{\frac{k+1}{k}}} = \frac{1}{2}$$

Como $L = \frac{1}{2} < 1$, entonces por el **criterio de la raíz**,
la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + 3}{2^{k+1}}$ converge.

Ejemplo

Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}$$

Resolución

$$\text{Sea } a_k = \frac{1}{2^k} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2}, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{e}{2} > 1$$

Como $L = \frac{e}{2} > 1$, entonces del criterio de la raíz, la serie diverge.

Ejercicio

Investigue la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{5^{k+1}}$$

Resolución



Teorema (Criterio de Leibniz para series de términos alternantes)

Si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales positivos **no creciente** y tal que **$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$** , entonces, la series

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$$

son convergentes.

Definición (Serie absolutamente convergente)

La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ se dice que es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ es convergente

Definición (Serie condicionalmente convergente)

La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ que es convergente, pero no es **absolutamente convergente**, se denomina condicionalmente convergente.

Teorema (De la convergencia Absoluta de Series)

Dada la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \text{ converge} \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \text{ converge}$$

Ejemplo Investigue la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

Resolución

Sea $a_k = \frac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Tenemos que $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es no creciente, y $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} = 0$.

Por lo tanto, por el **criterio de Leibnitz** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ converge

Sin embargo tenemos que $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (serie armónica), es divergente

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$, es condicionalmente convergente

Ejemplo Estudie la convergencia absoluta de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k^3}$$

Resolución

$$|a_k| = \frac{\ln k}{k^3} \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Por el **criterio de comparación** la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge, ya que

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.

$\therefore$ La serie dada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k^3}$ es absolutamente convergente,
y por tanto convergente.